Cavilación alternativa a la dualidad del problema del consumidor

Alternative consideration to the duality of consumer's problem

*Marco Vinicio Monge-Mora**

Resumen:

Este trabajo ofrece un análisis nuevo sobre estática comparativa de la demanda. Nuevo en el sentido de que simplifica la obtención –tanto formalmente como en términos de supuestos- del *Lema de Shephard* y de la *Identidad de Roy*, al demostrarlos con el uso del *Teorema de Euler sobre funciones homogéneas* y sin acudir al cumplimiento de la dualidad, en lugar de hacerlo por medio

* Estudiante de Bachillerato en Ciencias Económicas de la Universidad de Costa Rica. Asesor económico de la Asociación Costarricense de Operadoras de Pensiones y asistente de investigación en la Universidad de Princeton. Correo electrónico: marcomonge10@gmail.com

del *Teorema de la Envolvente* o el *Teorema de la Función Implícita*. A partir de ello, se estudia la dualidad del problema del consumidor sin exigir cuasi-concavidad de la función de utilidad.

Palabras clave: LEMA DE SHEPHARD- IDENTIDAD DE ROY - DUALIDAD - MALES - FUNCIONES HOMOGÉNEAS.

Abstract:

This paper offers a new analysis on comparative statics of demand. New in the sense that it simplifies the obtaining -both formally and in terms of assumptions- of *Shephard's Lemma* and *Roy's Identity* by demonstrating them with the use of *Euler's Theorem on homogeneous functions* and without appealing to the fulfillment of duality, rather than using the *Envelope Theorem* or the *Implicit Function Theorem*. Based on this, the duality of the consumer problem is studied without requiring quasi-concavity of the utility function.

Key words: SHEPHARD'S LEMMA - ROY'S IDENTITY - DUALITY - BADS - HOMOGENEOUS FUNCTIONS.

Agradecimientos

A Danilo Alberto Monge Acuña por su constante y enriquecedora retroalimentación.

Recibido: 12 de mayo del 2021
Aceptado:15 de agosto de 2021

Introducción

La manida *navaja de Ockham* es, como todo principio metodológico (o como todo axioma en general), arbitraria en cierta medida. Pero ofrecer cavilaciones que sean metodológicamente más simples brinda una ganancia pedagógica y, conforme disminuyen tanto el número como la especificidad de los supuestos necesarios para alcanzar una determinada conclusión, mayor es su aplicabilidad. La teoría de la demanda no es la excepción.

Las primeras dos propiedades sobre las que versa este artículo nunca han sido demostradas del modo en que aquí se hace y, en muchas ocasiones, se las demuestra exigiendo que se cumpla la tercera propiedad. Lo único que se requiere a lo largo de este trabajo es monotonía de preferencias y el siguiente lema:

Lema (*Teorema de Euler sobre funciones homogéneas*): Si una función $f(\vec{Z})$ es homogénea de grado "h" en sus "T" variables –donde -$\vec{Z} = (z_1, \dots, z_T)$, entonces:

$$hf(\vec{Z}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial f(\vec{Z})}{\partial x_t} x_t \ (1)$$

Suponga que un individuo tiene preferencias tales que pueden representarse por una función de utilidad $u(\vec{X})$ que depende de un vector "n"-dimensional, $\vec{X} \coloneqq (x_1, \dots, x_n)^t$ que tiene como cada una de sus entradas a la respectiva mercancía de entre las "n" que toma en consideración.

$\vec{X}$ Suponga que el individuo desea, mediante la elección de con cantidades no negativas de las mercancías y enfrentándose a un vector de precios positivos - $\vec{P} \coloneqq (p_1, \dots, p_n)$ - de las mismas que considera como dados, minimizar el valor nominal de su gasto ($\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, (, que es igual al producto punto del vector de precios con el vector de mercancías) sujeto a alcanzar, como mínimo un nivel de utilidad dado $(\bar{u})$ Esto es:

$$\min_{\vec{X} \geq \vec{0}} \vec{P} \cdot \vec{X} \text{ sujeto a } u(\vec{X}) \geq \bar{u} \ (2)$$

Sea $e(\vec{P}, \bar{u})$ la función valor mínimo que resulta de este problema de decisión y sea el vector de *demandas hicksianas* -$\vec{X}^H = \left(x_1^H(\vec{P}, \bar{u}), \dots, x_n^H(\vec{P}, \bar{u})\right)$ - su argumento de minimización.

De modo que la *función de gasto* o *función de costo mínimo* consiste en:

$$e(\vec{P},\bar{u}) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^H(\vec{P},\bar{u})p_i \text{ (3)}$$

Proposición 1 (*Lema de Shephard*):

$$\frac{\partial e(\vec{P},\bar{u})}{\partial p_i} = x_i^H(\vec{P},\bar{u}) \; \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ (4)}$$

Demostración: Como se sabe que $e(\vec{P},\bar{u})$ es homogénea de grado 1 en precios, se sigue de (3) que:

$$e(\vec{P},\bar{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e(\vec{P},\bar{u})}{\partial p_i} p_i \text{ (5)}$$

Y por definición de la *función de gasto:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e(\vec{P},\bar{u})}{\partial p_i} p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^H(\vec{P},\bar{u})p_i \leftrightarrow \vec{P} \cdot \nabla e(\vec{P},\bar{u}) = \vec{P} \cdot \vec{X}^H \text{ (6)}$$

De donde, por inspección, se obtiene que el vector de *demandas hicksianas* coincide con el vector gradiente -$\nabla e(\vec{P},\bar{u})$- de la *función de costo mínimo*. Alternativamente, también puede apreciar que –como todas las entradas de $\vec{P}$ deben ser números reales- el conjugado de $\vec{P}$ es $\vec{P}$. De modo que puede "pasarse al otro lado" de la ecuación vectorial definida en (6) directamente su inversa y por la conmutatividad del producto punto se llega a la misma conclusión.

Suponga ahora que el individuo desea, mediante la elección de $\vec{X}$ con cantidades no negativas de las mercancías y enfrentándose a un vector de precios positivos $\vec{P}$ de las mismas que considera como dados, maximizar su función de utilidad sujeto a que el valor nominal de su gasto no puede exceder el de su ingreso nominal "m".

$$\max_{\vec{X} \geq \vec{0}} u(\vec{X}) \text{ sujeto a } m \geq \vec{P} \cdot \vec{X} \text{ (7)}$$

Sea $v(\vec{P},m)$ la función valor máximo que resulta de este problema de decisión y sea el vector de *demandas marshallianas* -$\vec{X}^M = \left(x_1^M(\vec{P},m), \dots, x_n^H(\vec{P},m)\right)^t$- su argumento de maximización.

Se sabe que si las preferencias son monótonas (no saciables), entonces hay al menos una mercancía a la que se la considera "bien" (con utilidad marginal positiva), se consume todo el ingreso. De modo que:

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i^M(\vec{P}, m) p_i \; (8)$$

Proposición 2 (*Identidad de Roy*):

$$\frac{-\frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial m}} = x_i^M(\vec{P}, m) \;\; \forall i \in \{1, \dots, n\} \; (9)$$

Demostración: Como se sabe que $v(\vec{P}, m)$ es homogénea de grado 0 en precios e ingreso, se sigue de (3) que:

$$0 = \frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial m} m + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial p_i} p_i \; (10)$$

$$\leftrightarrow$$

$$-\frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial m} m = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial p_i} p_i \; (11)$$

$$\leftrightarrow$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial m}} p_i \; (12)$$

Si las preferencias son monótonas, entonces por (8):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{-\frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial m}} p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^M(\vec{P}, m) p_i \; (13)$$

Y, por inspección o por el método de resolución de ecuaciones vectoriales antes empleado, se deduce el resultado.

Proposición 3 (*Dualidad en el problema del consumidor*):

$$x_j^H\left(\vec{P}, v(\vec{P}, m)\right) = x_i^M(\vec{P}, m) \; \forall i \in \{1, \dots, n\} \; (14)$$

Demostración: Se sabe que, si la función de utilidad del individuo es estrictamente creciente -preferencias monótonas-, el valor nominal del gasto coincide con el del ingreso y se sabe (Jehle & Reny, 2011, p.42).

$$m = e\left(\vec{P}, v(\vec{P}, m)\right) \ (15)$$

Que es cierto si y solo si –sii- por (6) y (13):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^M(\vec{P}, m)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^H\left(\vec{P}, v(\vec{P}, m)\right)p_i \ (16)$$

Y, por inspección o por el método de resolución de ecuaciones vectoriales antes empleado, se tiene que el vector de *demandas mashallianas* coincide con el vector de *demandas hicksianas* evaluadas en $\bar{u} = v(\vec{P}, m)$.

El hecho de que solo se requiera monotonía para alcanzar estas propiedades puede interiorizarse mejor con un caso particular.

Ejemplo 1 (*Perfectos sustitutos*): Suponga que las preferencias de un individuo se describen por:

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ (17)$$

Es claro que, como no hay preferencia por la variedad y se sabe que solo las soluciones de esquina se encuentran definidas, el individuo alcanzará el sumando más grande, o lo que es igual, consumir el bien relativamente más barato (que su tasa marginal de sustitución subjetiva supere la tasa marginal de sustitución de mercado). En consecuencia, destina todo su ingreso a consumir dicho bien y, por ende, este es el único que le genera utilidad. Así:

$$x_j^H(\vec{P}, \bar{u}) = \begin{cases} \frac{\bar{u}}{\alpha_j} \text{ sii } \frac{\alpha_j}{\alpha_k} > \frac{p_j}{p_k} \ \forall k \neq j \wedge k, j \in \{1, \dots, n\} \\ 0 \text{ si } \exists k \neq j \wedge k, j \in \{1, \dots, n\}: \frac{\alpha_j}{\alpha_k} < \frac{p_j}{p_k} \end{cases} \ (18)$$

Para comprobar el cumplimiento de la Proposición 1, vea que:

$$e(\vec{P}, \bar{u}) = \frac{p_j \bar{u}}{\alpha_j} \leftrightarrow \frac{\partial e(\vec{P}, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\bar{u}}{\alpha_j} \ (19)$$

Además,

$$x_j^M(\vec{P},m) = \begin{cases} \frac{m}{p_j} \text{ sii } \frac{\alpha_j}{\alpha_k} > \frac{p_j}{p_k} \ \forall k \neq j \wedge k,j \in \{1,\dots,n\} \\ 0 \text{ si } \exists k \neq j \wedge k,j \in \{1,\dots,n\}: \frac{\alpha_j}{\alpha_k} < \frac{p_j}{p_k} \end{cases} \quad (20)$$

Para comprobar el cumplimiento de la Proposición 2, vea que:

$$v(\vec{P},m) = \frac{\alpha_j m}{p_j} \leftrightarrow \frac{-\frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial p_j}}{\frac{\partial v(\vec{P},m)}{\partial m}} = \frac{-\frac{-\alpha_j m}{(p_j)^2}}{\frac{\alpha_j}{p_j}} = \frac{m}{p_j} \ (21)$$

Finalmente, para comprobar el cumplimiento de la Proposición 3, vea que:

$$x_j^H\left(\vec{P}, v(\vec{P},m)\right) = \frac{\frac{\alpha_j m}{p_j}}{\alpha_j} = \frac{m}{p_j} \ (22)$$

Para los tres teoremas, el cumplimiento para mercancías no consumidas es trivial.

Empero, la monotonía de las preferencias parece ser la cota inferior de restricciones necesarias para el cumplimiento generalizado de estas proposiciones.

Ejemplo 2 (*Males*): Suponga que las preferencias de un individuo se describen por:

$$u(x_1,\dots,x_n) = min\{x_1 - x_2,\dots,x_1 - x_n,\dots,x_2 - x_1,\dots,x_2 - x_n,\dots,x_n - x_1,\dots,x_n - x_{n-1}\} \ (23)$$

Se sabe que el punto de consumo óptimo, iguala todos los términos y así es claro que $x_1^* = x_2^* = \cdots = x_n^*$. De modo que un individuo racional alcanza su máximo nivel de satisfacción con 0 "útiles" y una *función de utilidad indirecta* - $v(\vec{P},m)$- constante (no se cumple la *identidad de Roy*) y si no se dota de intuición económica al ejercicio de optimización, gastar todo su ingreso es solución al problema de maximización de utilidad sujeto a restricción presupuestaria y habría una solución positiva a este y una nula al de minimización del gasto sujeto a alcanzar como mínimo un nivel dado de satisfacción (no se cumple la *dualidad*).

En conclusión, que al ser $v(\vec{P}, m)$ quien representa la satisfacción, en unidades monetarias, que le genera al individuo su decisión de consumo y $e(\vec{P}, \bar{u})$ el desembolso nominal mínimo que debe desempeñar el individuo para alcanzar un nivel de utilidad fijo, entonces solo se requiere el cumplimiento de unos axiomas mínimos de racionalidad y no saciedad, para apreciar que las decisiones de demanda son el modo en que el consumidor reacciona ante los cambios en los precios relativos (Proposición 1) y el ingreso real (Proposición 2), y que el consumidor es capaz de elegir por su propia naturaleza decisora y no solo por la naturaleza del problema de decisión (Proposición 3).

Referencias

G. Jehle G. & P. Reny. (2011). *Advanced Microeconomic Theory*. Pearson.